Módulo 8
Geometria Espacial I – Noções básicas de geometria de posição; Poliedros; Prisma; Paralelepípedo

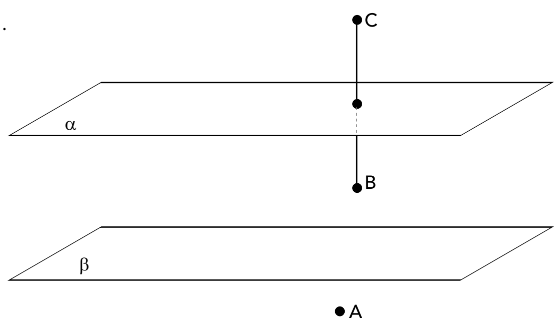
Atividades para sala

01 **C**

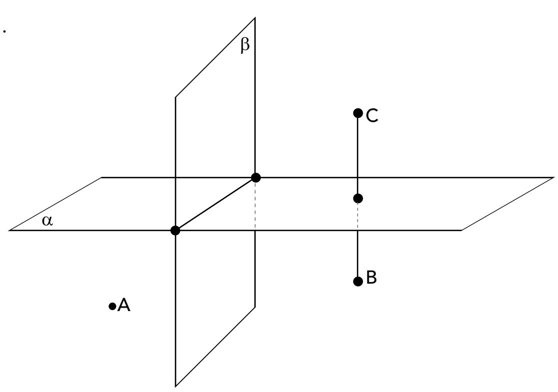
Um plano divide o espaço em dois semiespaços opostos, dos quais ele é origem.

Observe os casos:

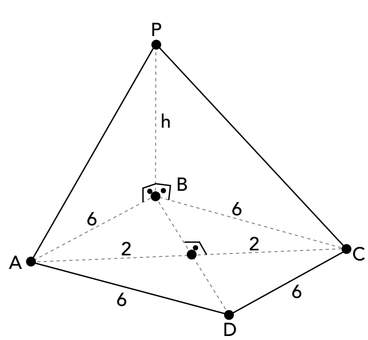
I.



II.

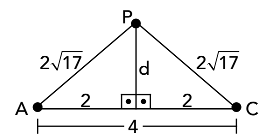


02 **C**



I. $\frac{6 \cdot h}{2} = 12\sqrt{2} \Rightarrow h = 4\sqrt{2} \Rightarrow PC = 2\sqrt{17} = PA$

Logo:



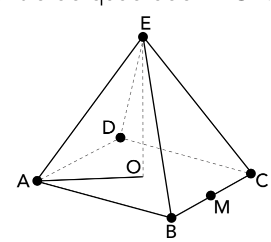
Pitágoras $\Rightarrow$ $(2\sqrt{17})^2 = 2^2 + d^2 \Rightarrow d = 8$

$\text{Área}_{PAC} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16 \text{ m}^2$

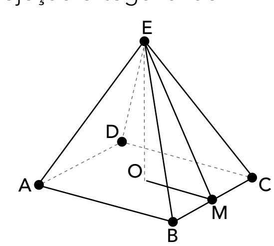
03 **C**

Acompanhe:

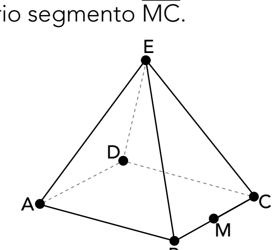
I. $\overline{AO}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AE}$ no plano da base, em que O é o centro do quadrado ABCD.



II. $\overline{OM}$ é a projeção ortogonal de $\overline{EM}$ no plano da base.



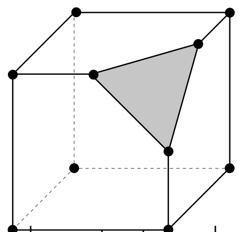
III. A projeção ortogonal de $\overline{MC}$ no plano da base coincide com o próprio segmento $\overline{MC}$.



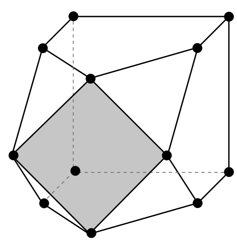
Portanto, reunindo I, II e III, encontra-se a representação desejada na alternativa C.

04 **C**

Observe que, para cada tetraedro retirado, surgirá uma face triangular no novo poliedro.



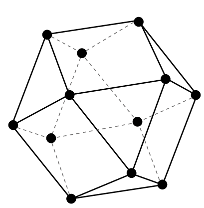
Com a retirada de quatro tetraedros vinculados a uma mesma face do cubo, surgirá uma nova face quadrada.



Assim:

Como são 8 vértices no cubo $\Rightarrow$ 8 faces triangulares no novo poliedro.

Como são 6 faces no cubo $\Rightarrow$ 6 faces quadradas no novo poliedro.



Portanto, o novo poliedro tem 14 faces.

05 **C**

V: número de vértices

F: número de faces triangulares

A: número de arestas

Como toda aresta é comum a duas faces, escreve-se:

$$2A = 3F \Rightarrow A = \frac{3F}{2}$$

Pelo Teorema de Euler, é possível obter F.

$$V + F = A + 2 \Rightarrow 32 + F = \frac{3F}{2} + 2 \therefore F = 60$$

Logo, conclui-se que: $A = \frac{3F}{2} \Rightarrow A = \frac{3 \cdot 60}{2} \therefore A = 90$

06 **B**

Em um poliedro convexo toda aresta é comum a duas faces.

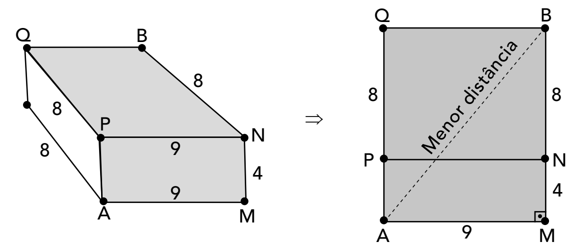
Nessas condições:
12 faces pentagonais: $12 \cdot 5 = 60$ arestas
20 faces hexagonais: $20 \cdot 6 = 120$ arestas

Logo, $2A = 180 \Rightarrow A = 90$.

Assim, calcula-se o número de vértices pelo Teorema de Euler: $V + F = A + 2 \Rightarrow V + 32 = 90 + 2 \therefore V = 60$

07 **B**

Planificação das faces destacadas



$$\begin{cases} AB^2 = 9^2 + 12^2 \\ \text{Logo:} \\ AB = 15 \text{ m} \end{cases}$$

08 **C**

De acordo com a natureza do triângulo da base:

$53^2 = 28^2 + 45^2 \Rightarrow$ triângulo da base é retângulo.

Fazendo a comparação de áreas, segue o resultado:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{cateto} \cdot \text{cateto}}{2} = \text{semiperímetro} \cdot \text{raio}$$

$$\text{Logo, } \frac{28 \cdot 45}{2} = \left(\frac{28 + 45 + 33}{2}\right) \cdot r \therefore r = 10 \text{ cm (raio)}$$

09 **D**

$$\text{Prisma hexagonal regular} \begin{cases} \text{Altura} = 2 \text{ cm} \\ \text{Aresta da base} = 1 \text{ cm} \end{cases}$$

Portanto:
Volume do prisma = (área da base) · (altura) = V

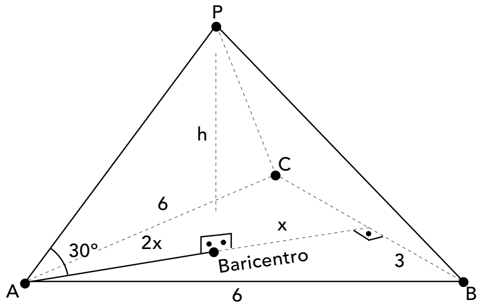
$$V = \left(6 \cdot \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \cdot 2 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Atividades propostas

01 **C**

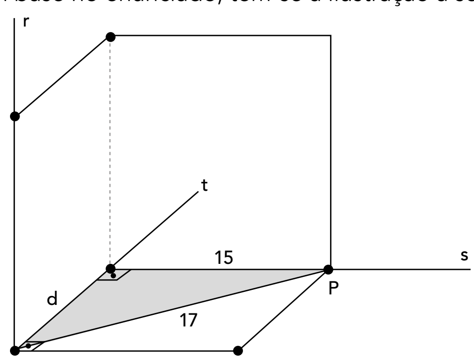
$$\text{I. } 3x = \frac{6\sqrt{3}}{2} (\text{altura do } \Delta \text{ equilátero}) \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\text{II. tg } 30° = \frac{h}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = 2 \text{ m}$$



02 **C**

Com base no enunciado, tem-se a ilustração a seguir:

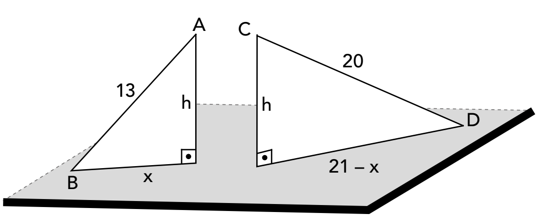


- **r** e **s** são retas ortogonais.
- **t** é uma reta perpendicular a **s** e **r**.
- P dista 15 m de **t** e 17 m de **r**.

Então:

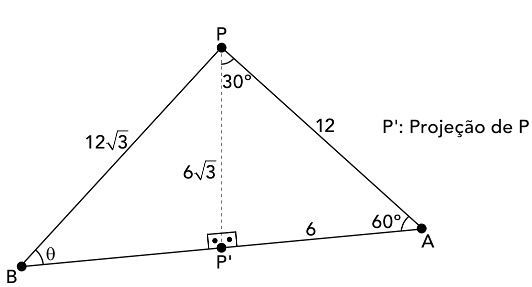
Pitágoras $\Rightarrow 17^2 = 15^2 + d^2 \Rightarrow$
$d = 8$ m

03 **C**



Pitágoras $\Rightarrow 20^2 - (21 - x)^2 = 13^2 - x^2$
$400 - 441 + 42x - x^2 = 169 - x^2$
$42x = 210$
$x = 5 \Rightarrow h = 12$ m

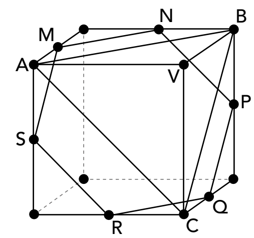
04 **B**



Logo:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{6\sqrt{3}}{12\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30°$$

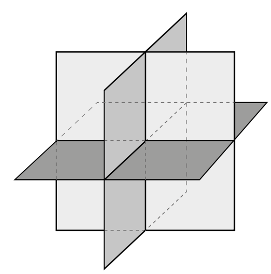
05 **E**



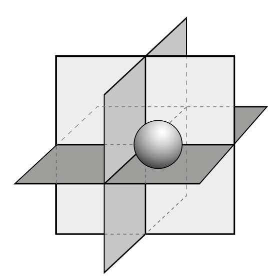
- $MN = \dfrac{AB}{2}$; $PQ = \dfrac{BC}{2}$; $RS = \dfrac{AC}{2}$ são bases médias.
- Consequentemente, $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$ // $\overline{BC}$ e $\overline{RS}$ // $\overline{AC}$.
- Logo, o plano MNPQRS é paralelo ao plano ABC e o cubo fica dividido em dois sólidos iguais.

06 **D**

A figura a seguir mostra que três planos perpendiculares dois a dois determinam oito triedros trirretangulares.



Veja que cada triedro admite uma única esfera de raio 10 cm tangente aos três planos.



Portanto, apenas oito esferas satisfazem a condição do problema.

07 **A**

Sabe-se que, em um poliedro convexo, toda aresta é comum a dois vértices. Portanto:

- poliedro convexo $\Rightarrow$ Segunda Relação de Euler: V + F = A + 2
- 10 ângulos tetraédricos $\Rightarrow 10 \cdot 4 = 40$ arestas
- 1 ângulo pentaédrico $\Rightarrow 1 \cdot 5 = 5$ arestas
- 15 ângulos triédricos $\Rightarrow 15 \cdot 3 = 45$ arestas

Então:

$40 + 5 + 45 = 2A \Rightarrow A = 45$

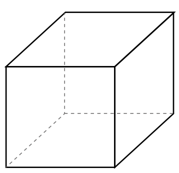
Desse modo, encontra-se o número de faces do poliedro:

$V + F = A + 2 \Rightarrow 26 + F = 45 + 2 \Rightarrow F = 21$.

08 **C**

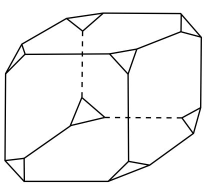
Para que a quantidade de cores seja descoberta, deve-se, inicialmente, descobrir o número de faces do sólido formado.

- **Cubo:**



→ 6 faces

- **Novo poliedro:**



→ Cada corte gera uma nova face.
(8 vértices > 8 cortes > 8 novas faces)
Total de faces do novo sólido
6 + 8 = 14 faces

Então, o total de cores (cor distinta das demais faces) que serão utilizadas na pintura é 14.

09 **D**

Em um poliedro convexo, toda aresta é comum a duas faces.

$S = (V - 2) \cdot 360°$

$(V - 2) \cdot 360° = 3600° \Rightarrow V = 12$

Como $F = 15$, tem-se:

$V + F = A + 2 \Rightarrow A = 25$.

Supondo que **x** é o número de faces triangulares, e **y** é o número de faces quadrangulares, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 3x + 4y = 50 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se $x = 10$ e $y = 5$, ou seja, o poliedro tem 5 faces quadrangulares.

10 **D**

I. $F = 8$
II. $6 < V < 14$
III. $V + F = A + 2$ (2º Euler) $\Rightarrow V = A - 6$

Então,
$6 < A - 6 < 14$
$12 < A < 20$

Logo:
$13 \le A \le 19$

11 **E**

Sabe-se que uma pirâmide possui uma única base. Com isso, conclui-se que apenas Alberto (figura 1) e Jorge (figura 2) atenderam à solicitação da empresa. Observe.

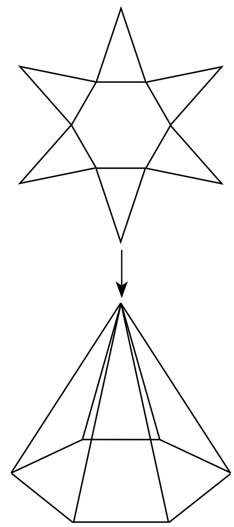


Figura 1

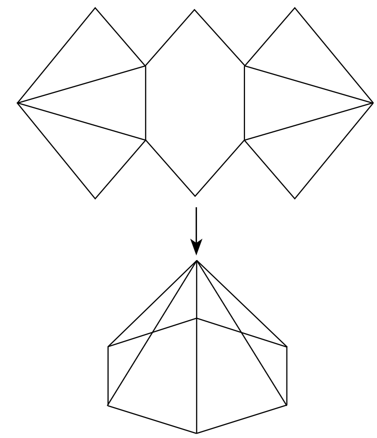


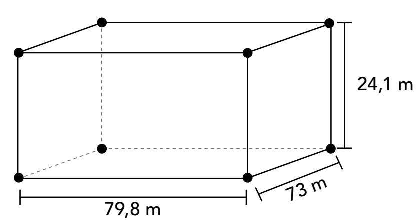
Figura 2

12 **B**

Um octaedro é composto por 8 faces triangulares. A figura que representa o octaedro regular no quadro é a do ar. Como cada face do octaedro é um triângulo equilátero, têm-se, em torno de cada vértice, quatro ângulos de 60°. Assim, a soma das medidas dos ângulos em torno de cada vértice é 240°.

13 **A**

Paralelepípedo reto retângulo



Volume do hangar =

$V_H = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}) = (79{,}8) \cdot (73) \cdot (24{,}1) = 140392{,}14\ m^3$.

14 **C**

Prisma hexagonal regular $\begin{cases} \text{Altura} = 30\ cm \\ \text{Aresta da base} = 10\ cm \end{cases}$

Então:

I. Área lateral do prisma $= (10 \cdot 30) \cdot 6 = 1800\ cm^2$.

II. Área das bases do prisma $= 2 \cdot \left[6 \cdot \left(\dfrac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right)\right] = 300\sqrt{3}\ cm^2$.

III. Área total do prisma $= (1800 + 300\sqrt{3})\ cm^2 \cong 2310\ cm^2$.

Em virtude dos vincos, tem-se:

Área total de uma embalagem = $1,2 \cdot (2310\ cm^2) = 2772\ cm^2$.

Portanto:

500 embalagens $\Rightarrow 500 \cdot (2772\ cm^2) = 1\,386\,000\ cm^2 = 138,6\ m^2$.

15 **C**

Para determinar o quanto o nível da água subiu, basta escrever: $40 \cdot 30 \cdot x = 2400$, em que **x** é a medida do deslocamento da água. Então $x = 2$ cm.

Dessa forma, a água atingiu 22 cm de altura no tanque.

16 **B**

De acordo com o enunciado, pode-se garantir que:

$80^3 - L^2 \cdot 80 = L^2 \cdot 80 \Rightarrow 80^3 = 2L^2 \cdot 80$

$\Rightarrow 80^2 = 2L^2 \therefore L = 40\sqrt{2}$ cm

17 **C**

Volume do degrau = V_d = (área da base) · (altura)

$$V_d = \left(\frac{30 \cdot 15}{2}\right) \cdot 60 = 13\,500\ cm^3$$

Logo:

Volume (20 degraus) = $20 \cdot V_d = 270\,000\ cm^3 = 270\ dm^3$

18 **C**

Do enunciado, tem-se:

$6a = 36 \Rightarrow a = 6$ (aresta da base do prisma)

Então:

Volume do prisma: $V = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10$

$$V = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 10 = 540\sqrt{3}\ cm^3 \cong 934,2\ cm^3 = 934,2\ mL$$